



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025
CLASA a IX- a
BAREM DE CORECTARE

Problema 1

Dacă $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x , determinați numărul natural n pentru care:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{[\sqrt{k^{12} + 4k^6 + 3}]}{k^4 - k^2 + 1} - 1 \right) = 210.$$

Soluție:

$$k^{12} + 4k^6 + 3 = (k^6 + 2)^2 - 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$[\sqrt{k^{12} + 4k^6 + 3}] = [\sqrt{(k^6 + 2)^2 - 1}] = k^6 + 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Se obține } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{k^6 + 1}{k^4 - k^2 + 1} - 1 \right) = 210 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Avem } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{(k^2 + 1)(k^4 - k^2 + 1)}{k^4 - k^2 + 1} - 1 \right) = 210 \Rightarrow \sum_{k=1}^n k = 210 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 210 \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 420 = 0 \Rightarrow n = 20 \dots\dots\dots 1p$$



Problema 2

Se consideră numărul real a situat în intervalul $(0;1)$.

a. Determinați intersecția intervalelor $I = \left(\frac{a+1}{2}; \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ și $J = \left(1; \frac{1}{a}\right)$.

b. Dacă intervalul $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ conține exact trei numere întregi, calculați

$S = \left[\frac{1}{a}\right] + \left[\frac{a+1}{a}\right] + \left[\frac{2a+1}{a}\right] + \dots + \left[\frac{10a+1}{a}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Soluție:

a. Dacă $a \in (0; 1)$, atunci $\frac{1}{a} > 1$, deci $0 < a < 1 < \frac{1}{a}$ 1p

Aplicând $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y, \forall x, y \in (0; \infty)$, cu $x \leq y$ pentru $x = a$ și $y = 1$, apoi

pentru $x = 1$ și $y = \frac{1}{a}$ rezultă $a < \frac{a+1}{2} < 1 < \sqrt{\frac{1}{a}} < \frac{1}{a}$ 1p

Deci $I \cap J = \left(1; \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 1p

b. $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ conține exact trei numere întregi și conform punctului anterior $a < 1 < \frac{1}{a}$ rezultă

$a < 1 < 2 < 3 < \frac{1}{a} \leq 4$ 1p

$\left[\frac{na+1}{a}\right] = \left[n + \frac{1}{a}\right] = n + \left[\frac{1}{a}\right]$ 1p

Caz I: $\frac{1}{a} < 4$, rezultă $\left[\frac{1}{a}\right] = 3$

Deci $S = 3 + (3 + 1) + (3 + 2) + \dots + (3 + 10)$; $S = 88$ 1p

Caz II: $\frac{1}{a} = 4$, rezultă $\left[\frac{1}{a}\right] = 4$, deci $S = 99$ 1p



Problema 3

Se consideră o mulțime $G \subset \mathbb{R}$ care satisface simultan proprietățile:

- i) $1 \in G$
 - ii) dacă $x \in G$, atunci $\sqrt{x+2} \in G$.
 - iii) dacă $\sqrt{x+3} \in G$, atunci $x+4 \in G$.
- Arătați că $\sqrt{2021} \in G$.

Supliment Gazeta Matematică nr.12/2022

Soluție:

Demonstrăm prin inducție matematică, că $3n \in G, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

P(n): $3n \in G, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

I. Verificare pentru $n=1$

Dacă $1 \in G \Rightarrow \sqrt{1+2} \in G \Rightarrow \sqrt{3} \in G$ (din ii)

$\sqrt{3} \in G \Rightarrow \sqrt{0+3} \in G \Rightarrow 0+4 \in G$ (din iii) $\Rightarrow 4 \in G$.

$4 \in G \Rightarrow \sqrt{4+2} \in G$ (din ii) $\Rightarrow \sqrt{6} \in G$.

$\sqrt{6} \in G \Rightarrow \sqrt{3+3} \in G$ (din iii) $\Rightarrow 3+4 \in G \Rightarrow 7 \in G$.

Dacă $7 \in G \Rightarrow \sqrt{7+2} \in G \Rightarrow \sqrt{9} \in G$ (din ii) $\Rightarrow 3 \in G$3p

II. Demostrare

Presupunem P(k) adevărată \Rightarrow P(k+1) adevărată, oricare $k \geq 1$.

P(k): $3k \in G, (\forall) k \in \mathbb{N}^*$.

P(k+1): $3(k+1) \in G, (\forall) k \in \mathbb{N}^*$.

$3k \in G \Rightarrow \sqrt{3k+2} \in G$ (din ii)

$\sqrt{3k+2} = \sqrt{(3k-1)+3} \in G \Rightarrow 3k-1+4 \in G$ (din iii) $\Rightarrow 3k+3 \in G \Rightarrow 3(k+1) \in G$2p

Cum $2021 = 3 \cdot 673 + 2$ și $3 \cdot 673 \in G \Rightarrow \sqrt{3 \cdot 673 + 2} \in G$ (din ii) $\Rightarrow \sqrt{2021} \in G$ 2p

Problema 4

Fie paralelogramul $ABCD$ și punctele M, N, P astfel încât $M \in AB, N \in BC, P \in CD$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{5}{8}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DP} = \alpha\overrightarrow{DC}$, unde $\alpha \in R^*$.

- a) Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, exprimați vectorii $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ în funcție de vectorii \overrightarrow{AC} și \overrightarrow{BD} .
b) Determinați α astfel încât centrul de greutate al triunghiului MNP să fie pe dreapta AC .

Soluție:

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = 3 \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = 3.$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+3} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{3}{1+3} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{-1}{8} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{BD} \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{5}{3} \cdot \overrightarrow{NC} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{5}{3}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{1+\frac{5}{3}} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{5}{3}} \cdot \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{-3}{16} \cdot \overrightarrow{BD} + \frac{5}{16} \cdot \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{DP} = \alpha \cdot \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OP} = \alpha \cdot (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OP} = (\alpha - 1) \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{\alpha}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{1-\alpha}{2} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{\alpha}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 1p$$

- b) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului MNP

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) \cdot \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{8} \overrightarrow{AC} + \frac{-3}{8} \overrightarrow{BD} + \frac{5}{16} \overrightarrow{AC} + \frac{-3}{16} \overrightarrow{BD} + \frac{1-\alpha}{2} \overrightarrow{BD} + \frac{\alpha}{2} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{8\alpha+3}{16} \overrightarrow{AC} + \frac{-8\alpha-1}{16} \overrightarrow{BD} \right) \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{OG} \text{ și } \overrightarrow{AC} \text{ sunt coliniari iar } \overrightarrow{BD} \text{ și } \overrightarrow{AC} \text{ sunt necoliniari} \Rightarrow \frac{-8\alpha-1}{16} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{8} \dots\dots\dots 2p$$