MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025

CLASA a VIII - a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1

a) Arătați că pentru orice numere reale $x, y \in$ R, este adevărată inegalitatea

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

b) Arătați că dacă $a, b > 0, a + b = 1$ atunci

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Soluție:

a) $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{x^2+y^2+2xy}{4}$ ……..… …....1p

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2 \geq x^2+y^2+2xy$ ……………………………………………… ……1p

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (A) pentru orice numere reale x și y ……1p

b) $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ pentru $x = a+\frac{1}{a}$ și $y = b+\frac{1}{b}$ avem

$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geq \left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{a+b}{ab}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2$…………2p

Din inegalitatea mediilor avem $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\frac{1}{ab} \geq 5$ ………………………………………………………………………..1p

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\cdot 5^2 = \frac{25}{2}$ ……………………………..……………..1p

Problema 2

a) Dacă x, y $\in \mathbf{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2025}$ să se calculeze valoarea expresiei

$$E(x,y)=\sqrt{(x-2025)(y-2025)}$$

b) Să se arate că numărul $a = \sqrt{1+2026\sqrt{1+2023\cdot 2025}}$ este pătrat perfect.

Soluție:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2025} \implies \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2025} \implies xy = 2025x + 2025y$..1p

$(x-2025)(y-2025) = 2025^2$..1p

Deci E(x,y) = 2025

....1p

b)Folosim formula de calcul prescurtat $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ pentru

$2023 \cdot 2025 = (2024 - 1)(2024 + 1) = 2024^2 - 1$ 1p

$a = \sqrt{1+2026\sqrt{1+2024^2-1}} = \sqrt{1+2026\cdot 2024} = \sqrt{1+(2025+1)\cdot(2025-1)} =$

$= \sqrt{2025^2} = 2025$..2p

$a = 45^2$, deci a este pătrat perfect 1p

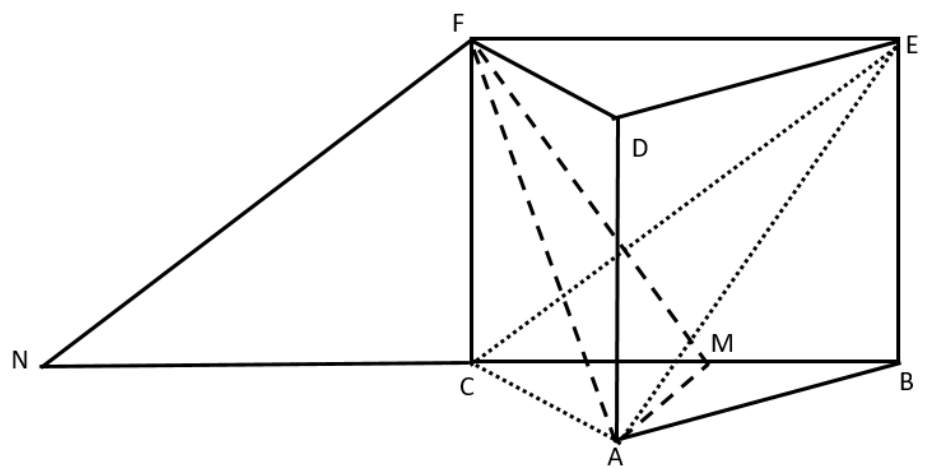
Problema 3

Într-o prismă triunghiulară regulată $ABCDEF$ raportul dintre latura bazei și înălțimea prismei este $\sqrt{2}$.

a) Arătați că $EC \perp FA$.

b) Dacă punctul M este mijlocul muchiei BC, arătați că $(EAC) \perp (AMF)$.

Soluție:



a) $\frac{l}{h} = \sqrt{2} \Rightarrow l = h\sqrt{2}$

Fie $N \in BC$ a. î. $BC = CN$

$CEFN$ paralelogram $\Rightarrow CE \parallel NF$ și $CE = NF$ 1p

AC mediană în ΔABN și $AC = \frac{BN}{2} \Rightarrow \Delta ABN$ dreptunghic în $\sphericalangle A \overset{TP}{\Rightarrow} NA = h\sqrt{6}$ 1p

Se demonstrează cu Reciproca Teoremei lui Pitagora că ΔNFA este dreptunghic în $\sphericalangle F \Longrightarrow$ $\sphericalangle NFA = 90^0$ 1p

$CE \parallel NF \Rightarrow \sphericalangle(CE, FA) = \sphericalangle(NF, FA) = \sphericalangle NFA = 90^0 \Rightarrow CE \perp FA$ 1p

b) M mijloc $BC \Longrightarrow AM$ mediană în ΔABC echilateral $\Longrightarrow AM \perp BC$

$EB \perp (ABC)$ și $AM \subset (ABC) \Longrightarrow EB \perp AM$ 1p

$$\left.\begin{array}{c} AM \perp BC \\ AM \perp EB \\ BC, EB \subset (EBC) \\ BC \cap EB = \{B\} \end{array}\right\} \Longrightarrow AM \perp (EBC) \Longrightarrow AM \perp CE$$ 1p

$$\left.\begin{array}{c} CE \perp FA \\ CE \perp AM \\ FA, AM \subset (AMF) \\ FA \cap AM = \{A\} \end{array}\right\} \Longrightarrow CE \perp (AMF) \text{ și } CE \subset (EAC) \Longrightarrow (EAC) \perp (AMF)$$ 1p

Problema 4

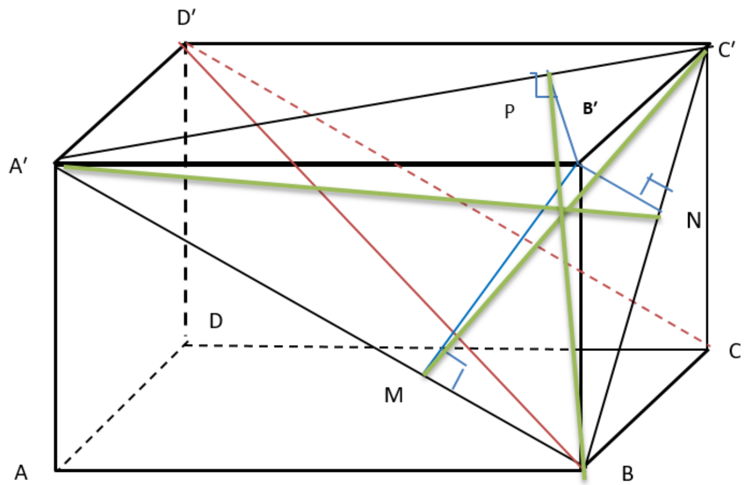
Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Notăm proiecțiile vârfului B' pe diagonalele $A'B, BC', A'C'$ cu M, N, respectiv P.

a) Arătați ca $B'M \perp (A'BD')$ și $B'N \perp (ABC')$.

b) Demonstrați că dreptele BP, $A'N$ și $C'M$ sunt concurente.

Gazeta nr.4/2024 –Enunț modificat

Soluție:



a)

$$\left.\begin{array}{c} BC \perp (ABB'A') \\ B'M \subset (ABB'A') \end{array}\right\} \Longrightarrow BC \perp B'M$$ 1p

$$\left.\begin{array}{c} B'M \perp A'B \\ B'M \perp BC \\ A'B \cap BC = \{B\} \\ A'B, BC \subset (A'BD') \end{array}\right\} \Longrightarrow B'M \perp (A'BD')$$ 1p

Analog pentru $B'N \perp (ABC')$...2p

b)

$$\left.\begin{array}{c} A'B' \perp C'B' \\ A'B' \perp BB' \\ C'B' \cap BB' = \{B'\} \\ C'B', BB' \subset (B'BC) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} A'B' \perp (B'BC) \\ B'N \perp BC' \\ B'N, BC' \subset (B'BC) \end{array}\right\} \overset{T_3\perp}{\Longrightarrow} A'N \perp BC' \Longrightarrow A'N \text{ înălțime în } \Delta A'BC'$$

....1p

Analog BP și $C'M$ înălțimi în $\Delta A'BC'$ $\Rightarrow BP$, $A'N$, $C'M$ concurente............................2p