MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025

CLASA a VII - a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

a) Arătați că $a = \sqrt{19^{n+1} + 74^{n+1}}$ este irațional oricare ar fi n∈N.

b) Arătați că $\sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025}}} < 2025$

Soluție:

a)Dacă n = par, U(a) =u(9 +4)=3 (1) **1p**

Dacă n = impar, U(a)=u(1 +6)=7 (2) **1p**

Din (1) și (2) => 19^{n+1} + 74^{n+1} nu este pătrat perfect => a este irațional **1p**

b) $\sqrt{2024 \cdot 2025} < \sqrt{2025 \cdot 2025} = 2025$ ……………… **1p**

$$\sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025}}}$$

$$< \sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2025 \cdot 2025}}} =$$

$$= \sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025 + 2025}} = \sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2025 \cdot 2025}} =$$

$= \sqrt{2024 \cdot 2025 + 2025} = 2025$ …….. ………………………. **3p**

Problema 2.

Să se determine mulțimea $M = \left\{ n \in \mathbb{Z} / \frac{2n^2-3n-4}{3n^2-2} \in \mathbb{Z} \right\}$

Soluție:

$\frac{2n^2-3n-4}{3n^2-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3n^2-2|2n^2-3n-4$ deoarece $n \in \mathbb{Z}$. ....(1p)

Avem $\left.\begin{array}{l} 3n^2-2|6n^2-9n-12 \\ 3n^2-2|6n^2-4 \end{array}\right\}$ ....(1p)

$\Rightarrow 3n^2-2|9n+8$ ....(1p)

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3n^2-2|9n^2+8n \\ 3n^2-2|9n^2-6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3n^2-2|8n+6, (1).$ ....(1p)

Obţinem $3n^2-2|n+2 \Rightarrow 3n^2-2|8n+16, (2).$ ....(1p)

Din $(1), (2)$rezultă $3n^2-2|10 \Leftrightarrow 3n^2-2 \in \{\pm 10, \pm 5, \pm 2, \pm 1\} \Leftrightarrow 3n^2 \in \{0,3,12\} \Leftrightarrow n \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$. ....(1p)

Dacă $n = 0 \Rightarrow F = 2 \in \mathbb{Z}$; $n = 1 \Rightarrow F = -5 \in \mathbb{Z}$; $n = 2 \Rightarrow F = -\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$; $n = -1 \Rightarrow F = 1 \in \mathbb{Z}$; $n = -2 \Rightarrow F = 1 \in \mathbb{Z}$. Obţinem $M = \{-2, -1, 0, 1\}$. ....(1p)

Problema 3

Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ și M mijlocul segmentului BC. Determinați măsura unghiului BAD, știind că $MA \perp MD$, $\sphericalangle ADM = 15^0$ și $AB + CD = AD$.

Soluție:

$D' = sim_M D$, $\triangle ADD'$- *isoscel* $\Rightarrow AD \equiv AD'$, $\sphericalangle D'AD = 2 \cdot 75^0 = 150^0$……… ..3p

$BM \equiv MC, D'M \equiv MD \Rightarrow BDCD'$- *paralelogram*, deci $BD' \equiv CD$ ……………………….2 p

$AD = AB + CD = AB + D'B = AD'$, rezultă că punctele $D', B, A -$ *coliniare*,

deci $\sphericalangle BAD = 150^0$…………………… 2 p

Problema 4

În triunghiul ΔABC, mediana BM şi înălţimea CD se intersectează în punctul P. Dacă $CD = BM$, arătaţi că $PB = 2PD$.

Soluție:

$\left.\begin{array}{r} MT \perp AB, T \in AB \\ CD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow MT \parallel CD$ 2p

$\left.\begin{array}{r} MT \parallel CD \\ M = \text{mijl } AC \end{array}\right\} \Rightarrow MT$ linie mijlocie în $\Delta ACD \Rightarrow CD = 2MT$, deci $BM = 2MT$ 2p

În triunghiul ΔBMT:

$\left.\begin{array}{r} \sphericalangle T = 90° \\ BM = 2MT \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle MBT = 30°$ 2p

În triunghiul ΔPBD:

$\left.\begin{array}{r} \sphericalangle D = 90° \\ \sphericalangle B = 30° \end{array}\right\} \Rightarrow BP = 2PD$ 1p