



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025**  
**CLASA a V - a**  
**BAREM DE CORECTARE**

**Problema 1**

a) Să se afle restul împărțirii numărului  $a = 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2024$  la 2025.

b) Să se arate că numărul  $2025^{1021}$  se poate scrie atât ca sumă a două pătrate perfecte, cât și ca sumă a trei pătrate perfecte.

**Soluție:**

a)  $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2024 = (9 \cdot 225) \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 224 \cdot 226 \cdot \dots \cdot 2024 \dots\dots\dots 1p$

Deci  $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2024$  se împarte exact la  $2025 = 9 \cdot 225 \dots\dots\dots 1p$

Finalizează și găsește restul = 1  $\dots\dots\dots 1p$

b)  $2025^{1021} = 2025 \cdot 2025^{1020} = 9^2 \cdot 5^2 \cdot (2025^{510})^2 = 9^2 \cdot (4^2 + 3^2) \cdot (2025^{510})^2 = \dots\dots\dots 1p$

$= 9^2 \cdot 4^2 \cdot (2025^{510})^2 + 9^2 \cdot 3^2 \cdot (2025^{510})^2 = (9 \cdot 4 \cdot 2025^{510})^2 + (9 \cdot 3 \cdot 2025^{510})^2 \dots\dots\dots 1p$

$2025^{1021} = 2025 \cdot 2025^{1020} = 9^2 \cdot 5^2 \cdot (2025^{510})^2 = (8^2 + 4^2 + 1^2) \cdot 5^2 \cdot (2025^{510})^2 = \dots\dots\dots 1p$

$= 8^2 \cdot 5^2 \cdot (2025^{510})^2 + 4^2 \cdot 5^2 \cdot (2025^{510})^2 + 1^2 \cdot 5^2 \cdot (2025^{510})^2 = (8 \cdot 5 \cdot 2025^{510})^2 +$

$(4 \cdot 5 \cdot 2025^{510})^2 + (1 \cdot 5 \cdot 2025^{510})^2 \dots\dots\dots 1p$



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII

## Problema 2

Fie numărul  $n = 481216202428...20202024$ .

- Câte cifre are numărul  $n$  ?
- Care este cifra de pe poziția 900 a numărului  $n$ .

### *Soluție:*

a) Numărul  $n$  este format din numerele 4, 8, 12, 16, 20, ... 2020, 2024 scrise unul după altul;  
4 și 8 sunt numere de o cifră(2 numere), numerele 12, 16, ... 96 sunt numere de câte 2 cifre(22 de numere), numerele 100, 104, ... 996 sunt numere de câte 3 cifre(225 de numere) iar numerele 1000, 1004, ... 2024 sunt numere de câte 4 cifre (257 de numere) .....2p

Deci numărul cifrelor numărului  $n$  este egal cu:  $2 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 225 \cdot 3 + 257 \cdot 4 = 1749$  .....1p

b)  $2 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 225 \cdot 3 = 721$  .....1p

Diferența de la 721 până la 900 este de 179 ( $= 44 \cdot 4 + 3$ ) de cifre care se regăsesc printre primele 45 de numere de câte 4 cifre din scrierea lui  $n$ : 100010041008...116811721176. ....2p

Deci cifra de pe poziția 900 a numărului  $n$  este 7 .....1p

(Sau  $\underbrace{48121620...116811721176}_{900\_cifre}$ )



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII

### Problema 3

Arătați că:

a) Numărul  $x = 3^{2n+3} \cdot 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3}$  este pătrat perfect, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ ;

b) Numărul  $y = 2^n + 3^{n+1} + 5^{n+2} + 7^{n+3}$  nu este pătrat perfect, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

**Soluție:**

a)  $x = 3^{2n+3} \cdot 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3} = (3 \cdot 4)^{2n+3} - (2 \cdot 6)^{2n+1} \cdot 6^2 = 12^{2n+1} (12^2 - 6^2) = \dots\dots\dots 1p$

$12^{2n+1} \cdot 108 = 12^{2n} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 9 = (12^n \cdot 12 \cdot 3)^2 = p.p. \dots\dots\dots 2p$

b) Prin împărțire la 4 orice număr natural este de forma:  $4k, 4k + 1, 4k + 2$  sau  $4k + 3$

Dacă:  $n = 4k \Rightarrow u(y) = 7$ ; dacă  $n = 4k + 1 \Rightarrow u(y) = 7$ ; dacă  $n = 4k + 2 \Rightarrow u(y) = 3$ ;

dacă  $n = 4k + 3 \Rightarrow u(y) = 3 \dots\dots\dots 2p$

Deci  $u(y) = \{3, 7\} \dots\dots\dots 1p$

Finalizează ( $u(p.p) \notin \{3, 7\}$ )  $\Rightarrow y \neq p.p. \dots\dots\dots 1p$



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII

#### Problema 4

Un fermier vinde păsări de curte astfel: o găină, două rațe, trei găște și patru curci cu prețul total de 1270 lei, respectiv o curcă, două găște, trei rațe și patru găini cu prețul total de 680 lei.

a) Câți lei ar trebui să plătească Gigel fermierului dacă îi cumpără o găină, o rață, o curcă și o găscă?

b) Cu câți lei este mai scumpă o curcă decât o rață și două găini?

#### **Soluție:**

a) Notăm cu  $a$ ,  $b$ ,  $c$  și  $d$  prețurile unei găini, unei rate, unei găște și respectiv unei curci.

Avem relațiile:  $a + 2b + 3c + 4d = 1270$  (1) și  $4a + 3b + 2c + d = 680$  (2) ..... 1p

Adunând relațiile (1) și (2) obținem  $5a + 5b + 5c + 5d = 1950$  (3) ..... 1p

Împărțind relația (3) la 5 obținem:  $a + b + c + d = 390$  ..... 1p

b) Dacă adunăm la relația (1) numărul  $2a + b$  obținem  $3a + 3b + 3c + 4d = 1270 + 2a + b$  ..... 1p

Avem:  $3a + 3b + 3c + 3d + d = 1270 + 2a + b \Rightarrow 3(a + b + c + d) + d = 1270 + 2a + b$  ..... 1p

$\Rightarrow 3 \cdot 390 + d = 1270 + 2a + b \Rightarrow d = 100 + 2a + b$  ..... 1p

Finalizează și găsește răspunsul egal cu 100 lei ..... 1p