OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025

CLASA a XII - a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1 Fie $M = \{a, b, c, d\}$ și operația $*: M \times M \to M$ o lege de compoziție internă pe M , astfel încât este asociativă și admite element neutru.

a) Arătați că dacă pentru orice element $x \in M$ există $y \in M$ astfel încât $x * y = e$, atunci acest y este unic. Demonstrați că x are un invers în M.

b) Considerăm tabelul parțial al operației :

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	?	?
c	c	?	a	?
d	d	?	?	a

Completați tabelul astfel încât să definească o structură de grup.

Soluție:

a) Presupunem că există $y_1, y_2 \in M$ astfel încât $x * y_1 = e$ și $x * y_2 = e$……………......*1p*

Dem. unicității $y_1 = y_1 * e = y_1 * (x * y_2) = (y_1 * x) * y_2 = e * y_2 = y_2$…………1p

Existența inversului……………………………………………………………….1p

b) Din tabel observăm că $a * a = a$ adică elementul neutru este a și se verifică $a * x = x * a = x, \forall x \in M$..1p

Completarea tabelului …………………………………………………………2p

Detaliat:

- *Asociativitatea și existența inverselor conduc la următoarele completări:*

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

- *fiecare element apare o singură data pe rând și pe coloană (proprietatea de închidere).*
- *Inversul fiecărui element este unic*

Demonstrăm că structura este grup……………………………………1p

Detaliat:

- **Asociativitatea:** *Se verifică prin calcul explicit .*
- **Element neutru:** *conform completării a este elemental neutru.*
- **Element simetrizabil:** *Fiecare element are un corespondent unic pentru care*

$$x * y = e$$

Problema 2 Se consideră mulțimile $H = \{a^2 | a \in Z_7\}$ și $G = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in Z_7, a \neq \hat{0} \text{ sau } b \neq \hat{0}\right\}$.

a) Să se determine elementele mulțimii H.

b) Fie $x, y \in H$ astfel încât $x + y = \hat{0}$. Să se arate că $x = y = \hat{0}$.

c) Să se arate că G este un grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricilor.

Soluție:

2.a) $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$ 1p

b) Din tabla adunării elementelor H, rezultă că dacă $x, y \in H$ astfel încât $x + y = \hat{0}$ atunci $x = y = \hat{0}$. 2p

c) Se verifică relația $A \cdot B \in G$ pentru orice $A, B \in G$ 1p

Asociativitatea este proprietatea generală a înmulțirii din $M_2(Z_7)$, iar elementul neutru este $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$. 1p

Dacă $a = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ condiția $a \neq \hat{0}$ sau $b \neq \hat{0}$ este echivalentă cu $\det A \neq \hat{0}$, conform punctului anterior. 1p

Inversa matricii $a = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ este $A^{-1} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$,

cu $c = (\det A)^{-1}. a$, $d = (\det A)^{-1} \cdot (-b)$ 1p

Problema 3

Să se calculeze $\int \frac{12x+11}{(x+1)\cdot(2x+3)\cdot(3x+1)\cdot(6x+5)+2026}dx$, $x \in (0, +\infty)$

Soluție:

$(x+1)\cdot(6x+5) = 6x^2 + 11x + 5$ și $(2x+3)\cdot(3x+1) = 6x^2 + 11x + 3$ … … … … … …. 1 p

Notăm $6x^2 + 11x + 4 = t \Rightarrow (12x+11)dx = dt$……………………………………………2p

Integrala inițială devine $\int \frac{1}{(t+1)\cdot(t-1)+2026}dt = \int \frac{1}{t^2+2025}dt = \frac{1}{45} arctg \frac{t}{45}$ +C........................ 2p

Finalizare $\int \frac{12x+11}{(x+1)\cdot(2x+3)\cdot(3x+1)\cdot(6x+5)+2026}dx = \frac{1}{45} arctg \frac{6x^2+11x+4}{45}$+ C..................................2p

Problema 4 a) Fie $a, b > 0$. Calculați $\int_{-1}^{1} \frac{1-a^x b^x}{a^x+b^x}\, dx$.

b) Fie $a, b > 0$. Determinați $\int_{-1}^{1} \frac{a^{2x}+b^{2x}+2}{a^x+b^x}\, dx$.

G.M. NR. 4/2024

Soluție: a) Fie $J = \int_{-1}^{1} \frac{1-a^x b^x}{a^x+b^x}\, dx$.

Utilizând schimbarea de variabilă $t = -x$ obținem $J = \int_{-1}^{1} \frac{1-a^{-x} b^{-x}}{a^{-x}+b^{-x}}\, dx$........................1p

$\Rightarrow J = \int_{-1}^{1} \frac{a^x b^x - 1}{a^x+b^x}\, dx = -J$. Rezultă $J = 0$..1p

b) Pentru $x \in [-1; 1]$, avem $\frac{a^{2x}+b^{2x}+2}{a^x+b^x} = \frac{(a^x+b^x)^2+2-2a^x b^x}{a^x+b^x} = a^x + b^x + \frac{2(1-a^x b^x)}{a^x+b^x}$.......1p

Fie $I = \int_{-1}^{1} \frac{a^{2x}+b^{2x}+2}{a^x+b^x}\, dx$ și $J = \int_{-1}^{1} \frac{1-a^x b^x}{a^x+b^x}\, dx$. Avem $I = \int_{-1}^{1} (a^x + b^x)\, dx + 2J$

Deoarece $J = 0 \Rightarrow I = \int_{-1}^{1} (a^x + b^x)\, dx$ 1p

Dacă $a, b \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \Rightarrow I = \frac{a-a^{-1}}{\ln a} - \frac{b-b^{-1}}{\ln b}$ 1p

Dacă $a = b = 1 \Rightarrow I = \int_{-1}^{1} (1+1)\, dx = 2x \Big|_{-1}^{1} = 4$..1p

Dacă $a \neq 1, b = 1 \Rightarrow I = \frac{a-a^{-1}}{\ln a} + 2$.

Dacă $a = 1, b \neq 1 \Rightarrow I = \frac{b-b^{-1}}{\ln b} + 2$..1p