OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025

CLASA a XI-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $a_1 = \sqrt{2025}$ și $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2025}{2026}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $1 \leq a_n \leq 2025,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 1)$.

Soluție:

a) Demonstrăm prin inducție matematică propoziția $P(n): 1 \leq a_n \leq 2025,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

b) Notăm $a = 2025$ și avem că $a_1 = \sqrt{a}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + a}{a+1}$, iar relația de la punctul a) devine $1 \leq a_n \leq a,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{(a_n - a)(a_n - 1)}{a+1}$ **1p**

Rezultă că $a_{n+1} - a_n \leq 0$, adică șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, deci monoton **1p**

c) Din punctele a) și b) avem că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in [1, a]$ **1p**

Trecând la limită în relația de recurență, obținem $L = 1$. **1p**

Pentru $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 1)$, aplicăm Stolz-Cesaro, adică

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\dfrac{1}{a_n - 1}} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\dfrac{1}{a_{n+1}-1} - \dfrac{1}{a_n - 1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_{n+1}-1)(a_n-1)}{a_n - a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_{n+1}-1)(a_n-1)}{-\dfrac{(a_n-1)(a_n-a)}{a+1}} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a_{n+1}-1)(a+1)}{-a_n + a} = 0$ **1p**

Problema 2

a) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $A^2 - A + I_n = O_n$. Calculați $\det\left(A^{2025} + I_n\right)$.

b) Se dau matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care verifică relațiile $A + B = I_n$ și $A^2 = A^3$. Arătați că matricea $I_n + A \cdot B$ este inversabilă.

Soluție:

a) $A^2 - A + I_n = O_n \Rightarrow A^2 = A - I_n \Rightarrow A^3 = A^2 - A \Rightarrow A^3 = -I_n$ **1p**

$A^{2025} = \left(A^3\right)^{675} = \left(-I_n\right)^{675} = -I_n$ **1p**

Atunci $A^{2025} + I_n = O_n$, deci $\det\left(A^{2025} + I_n\right) = 0$ **1p**

b) Din relația $A + B = I_n$, prin înmulțire la dreapta cu A obținem că $A^2 + B \cdot A = A$, adică $B \cdot A = A - A^2$, ... **1p**

iar prin înmulțire la stânga cu A obținem că $A \cdot B = A - A^2$, adică $A \cdot B = B \cdot A = A - A^2$ **1p**

Atunci $A^2 \cdot B = A^2 - A^3 = O_n$, rezultă că $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2 = O_n$ **1p**

Cum $I_n = I_n - (A \cdot B)^2 = (I_n - A \cdot B)(I_n + A \cdot B)$, rezultă că $\det(I_n - A \cdot B) \cdot \det(I_n + A \cdot B) = 1$, adică $\det(I_n + A \cdot B) \neq 0$, deci matricea $I_n + A \cdot B$ este inversabilă **1p**

Problema 3

Se dă funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$.

a) Arătați că $\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f}\Big)(\operatorname{tg}x)=\operatorname{tg}\left(2^n x\right),(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\prod\limits_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } k \text{ ori } f}\Big)(\operatorname{tg}x)$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } k \text{ ori } f}\Big)(\operatorname{tg}x)\right)$, unde $x\in\left(-\frac{\pi}{2^{n+1}},\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) Se demonstrează prin inducție matematică, ținând cont de $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ **2p**

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\prod\limits_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } k \text{ ori } f}\Big)(\operatorname{tg}x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{tg}\left(2^k x\right)}{2^k x}\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}2^k\right)=$ **1p**

$=1\cdot 2^{1+2+\ldots+n}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ **1p**

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } k \text{ ori } f}\Big)(\operatorname{tg}x)\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\operatorname{tg}\left(2^k x\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(2^k x\right)}\cdot\frac{\operatorname{tg}\left(2^k x\right)}{2^k x}\cdot 2^k=$ **2p**

$=\sum\limits_{k=1}^{n}2^k=2^{n+1}-2$. **1p**

Problema 4

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{11} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{23} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Determinați cel mai mic număr natural $n \geq 1$ cu proprietatea că A^n are toate elementele numere întregi.

G.M. 2024, Traian Preda, București

Soluție:

Fie $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{23} & 0 \end{pmatrix}$. Rezultă că $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{253} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B^3=O_3$. **2p**

Conform binomului lui Newton avem că $A^n=I_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2$. **1p**

Rezultă că $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n}{11} & 1 & 0 \\ \frac{n}{8}+\frac{n(n-1)}{2\cdot 253} & \frac{n}{23} & 1 \end{pmatrix}$. **1p**

$A^n \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \Rightarrow \frac{n}{11} \in \mathbb{Z}, \frac{n}{23} \in \mathbb{Z}$ și $\frac{n}{8}+\frac{n(n-1)}{2\cdot 253} \in \mathbb{Z}$, ... **1p**

ceea ce revine la $11|n$, $23|n$, respectiv $8|n$, adică $2024|n$. **1p**

Cum $n=2024$ verifică, acesta este minimul căutat. **1p**