MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025

CLASA a X - a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1

a) Calculați $(\sqrt{5}-1)^3$.

b) Determinați câte numere naturale nenule ***n*** verifică inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}<1-2\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

Soluție:

a) $(\sqrt{5}-1)^3 = 8\sqrt{5}-16$ 1p

b) Se amplifică fiecare fracție din membrul stâng cu expresia conjugată și după reducerea termenilor se obține inegalitatea: $\sqrt[3]{n+1}-1<1-2\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 2p

Aplicând a), obținem: $\sqrt[3]{n+1}-1<1-(1-\sqrt{5}) <=> \sqrt[3]{n+1}<1+\sqrt{5}$ 1p

Prin ridicare la cub, $n<15+8\sqrt{5}$ 1p

Cum $15+8\sqrt{5}\in(32,33) => n\in\{1,2,\dots,32\}$, deci sunt 32 de numere 2p

Problema 2

Considerăm numerele distincte $a, b, c \in (1, \infty)$.

Demonstrați că $ab = c$ dacă și numai dacă $\log_a \frac{a}{c} = \log_{\frac{b}{c}} b$.

G.M. Supliment – septembrie 2024

Soluție:

Verificăm condițiile de existență: dacă $a, b, c \in (1, \infty)$ și sunt distincte două câte două,

atunci $\frac{a}{c} > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ \frac{b}{c} > 0,\ \frac{b}{c} \neq 1$ 1p

Demonstrăm implicația directă "=>"

$ab = c <=> \frac{a}{c} = \frac{1}{b} => \log_a \frac{a}{c} = \log_a \frac{1}{b} => \log_a \frac{a}{c} = -\log_a b$ (1) 1p

$ab = c <=> \frac{b}{c} = \frac{1}{a} => \log_{\frac{b}{c}} b = \log_{\frac{1}{a}} b => \log_{\frac{b}{c}} b = -\log_a b$ (2)

Din (1) și (2) obținem $\log_a \frac{a}{c} = \log_{\frac{b}{c}} b$ 1p

Demonstrăm implicația inversă "<="

$\log_a \frac{a}{c} = \log_{\frac{b}{c}} b => \log_a a - \log_a c = \frac{1}{\log_b \frac{b}{c}} => 1 - \log_a c = \frac{1}{\log_b b - \log_b c}$

$=> 1 - \log_a c = \frac{1}{1 - \log_b c}$ 1p

$=> (1 - \log_a c)(1 - \log_b c) = 1 => 1 - \log_b c - \log_a c + \log_a c \cdot \log_b c = 1$

$=> \log_a c \cdot \log_b c = \log_b c + \log_a c$ 1p

$=> \log_a c \cdot \log_b c = \log_b c + \log_a b \cdot \log_b c => \log_a c \cdot \log_b c = \log_b c\,(1 + \log_a b)$

$=> \log_a c = 1 + \log_a b$ 1p

$=> \log_a c = \log_a a + \log_a b => \log_a c = \log_a ab => c = ab$ 1p

Problema 3

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcție cu proprietatea $f(f(x)) = x^2 - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $f(1)$.

b) Arătați că funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x \cdot f(x) + 1$ nu este injectivă.

Soluție:

a) Pentru $x = 1$ se obține $f(f(1)) = 1$ 1p

Pentru $x = f(1)$ se obține $f(f(f(1))) = f^2(1) - f(1) + 1$ 1p

$\Leftrightarrow f(1) = f^2(1) - f(1) + 1 \Leftrightarrow (f(1) - 1)^2 = 0$ 1p

$\Rightarrow f(1) = 1$ 1p

b) Pentru $x = 0$ se obține $g(0) = 1$ 1p

Pentru $x = 1$ se obține $g(1) = 1 - f(1) + 1 = 1$ 1p

g nu este funcție injectivă...1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Problema 4

a) Se dau numerele complexe z_1, $z_2 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|z_1 - z_2| = |z_2| = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Calculați $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ și $\frac{z_1}{z_2}$.

c) Arătați ca $E_n \in \mathbb{Z}$ pentru orice număr natural n, unde $E_n = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n}$.

Soluție:

a) Din relația $|z_2| = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, ținând cont că $z_2 \in \mathbb{C}^*$ se obține $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2}$ 1p

Din relația $|z_1 - z_2| = |z_2|$, ținând cont că $z_2 \in \mathbb{C}^*$ se obține $\left|\frac{z_1 - z_2}{z_2}\right| = 1$

=> $\left|\frac{z_1}{z_2} - 1\right| = 1$ 1p

Fie $\frac{z_1}{z_2}$ = z = a+bi => |z|=$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$ si |z-1|=$\sqrt{(a-1)^2+b^2} = 1$ de unde

$z \in \{1+i, 1-i\}$..1p

Deci $\frac{z_1}{z_2} \in \{1+i, 1-i\}$ 1p

b) $\frac{z_1}{z_2} \in \{1+i, 1-i\}$ => $E_n = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n} = (1+i)^n + (1-i)^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) + \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)$ 2p

⇨ Finalizare $E_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$..1p